МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ ТА НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ ВИКОНАВЧОГО ОРГАНУ КИЇВСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ (КИЇВСЬКОЇ МІСЬКОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ)

КИЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ (КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК)

відділення: математики
секція: геометрії
базова дисципліна: математика

ПОВОРОТНА ГОМОТЕТІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ НА ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ

Роботу виконала:
Статус у МАН
(слухач, кандидат, дійсний член МАН)
Баценко Тетяна Максимівна,
06.07.1999 р.,
учениця 11-А класу
Русанівського фізико-математичного ліцею міста Києва,
домашня адреса
контактний телефон,
електронна адреса
Науковий керівник:
Назаренко Микола Олексійович,
старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
контактний телефон
Педагогічний керівник:
Філіпповський Григорій Борисович,
учитель математики Русанівського фізико-математичного ліцею міста Києва
контактний телефон

КИЇВ – 2016

ПОВОРОТНА ГОМОТЕТІЯ
ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ
НА ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ

ПОВОРОТНА ГОМОТЕТІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ НА ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ

Баценко Тетяна Максимівна; Русанівський фізико-математичний ліцей; 11 клас; Дніпровський район; Назаренко Микола Олексійович, доцент Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук.

У даній роботі представлені теоретичні основи, методи розв’язку задач та власні наукові дослідження на тему поворотної гомотетії площини та простору.

Основною метою роботи є дослідження властивостей та ефективність застосування поворотної гомотетії на площині як потужного інструменту для розв’язування задач з геометрії, а також дослідження поворотної гомотетії у просторі, що є особистим внеском автора в роботу.

У першому розділі наведено теоретичний матеріал, необхідний для ознайомлення з темою роботи, зазначено основні властивості поворотної гомотетії та її складових, наведено поняття кутів між колами та сферами.

У другому розділі представлені базові задачі на площині, які є допоміжними для розв’язку більш складних завдань. Розглянуто способи побудови образів точок при поворотній гомотетії і пошук центру даного перетворення.

У третьому розділі проведено наукове дослідження поворотної гомотетії у просторі, сформульовані базові задачі.

У четвертому розділі показано ефективність застосування методу поворотної гомотетії при розв’язуванні задач різних рівнів складності – курсу шкільної геометрії поглибленого вивчення та завдання з олімпіад. Окрема частина результатів даної роботи опублікована в [1].

Отримані результати свідчать, що поворотна гомотетія є потужним інструментом для розв’язку задач будь-якого рівня складності і має застосування як і в планіметрії, так і в стереометрії. В роботі проведено авторське наукове дослідження та запропоновано нові задачі з даної теми.

[1] *Баценко Т.М. Поворотна гомотетія* // “У світі математики”. – 2015. - Т. 21., – випуск 2. – С.1-10.

ЗМІСТ

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

«||» – паралельність прямих або відрізків;

«∠» – кут

«Δ» – трикутник

«~» – подібність (наприклад ΔАВС ~ΔКМТ)

Х та Х* - точка та відповідно її образ при даному перетворенні

«R^{α}_{O}» - поворот з центром в точці О на кут α

Додаткові умовні позначення будемо вказувати безпосередньо перед задачею, якщо це необхідно.

ВСТУП

«Натхнення потрібно в поезії, як і в геометрії»

О.С.Пушкін

Темою даної наукової роботи є поворотна гомотетія площини та простору, що широко використовується у розв’язанні найрізноманітніших задач з геометрії. Причиною вибору теми поворотна гомотетія стали її новизна в поєднанні двох різних перетворень площини та простору, наявність області для власного дослідження, а саме поворотна гомотетія в просторі, а також ефективність застосування при розв’язуванні задач високого рівня складності.

Метою роботи є дослідити та вдосконалити теоретичну та практичну базу поворотної гомотетії площини, показати, що даний метод розв’язання є потужним інструментом для вирішення задач, а також дослідити та сформулювати основні теореми та задачі для поворотної гомотетії в просторі, що є абсолютно новими для стереометрії.

Основним методом дослідження стало проведення аналогій та розробка відповідних задач, у яких поворотна гомотетія простору має властивості, схожі з властивостями поворотної гомотетії на площині.

Проведена робота та отримані результати відкривають можливості для створення нових, цікавих з наукової точки зору задач стереометрії, що можуть бути використані як задачі для олімпіад з математики найвищого рівня. Також повною мірою розкрито теоретичне поняття поворотної гомотетії площини, а також її практичне застосування, що, як показано в роботі, допомагає у розв’язку чималої кількості задач, і особливо широко застосовується у задачах з колом.

Авторська стаття з теми «Поворотна гомотетія» була опублікована у Всеукраїнському математичному журналі «У світі математики» у випуску номер 2, 2015 рік, сторінки 1 – 10.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ПОВОРОТНУ ГОМОТЕТІЮ

Поворотною гомотетією називається композиція гомотетії та повороту, що мають спільний центр[4]. При поворотній гомотетії з центром О і коефіцієнтом $k > 0$ та кутом повороту α образом точки О є сама точка О, а образом будь-якої довільної іншої точки X є точка X* така що - $\overrightarrow{OX}' = k\overrightarrow{OX}$, а кут між променями OX* та OX дорівнює α. Вважають, що кут α додатній, якщо поворот від променю OX до променю OX* відбувається проти руху годинникової стрілки, і від'ємний в іншому випадку. Варто зауважити, що достатньо розглядати поворотну гомотетію з коефіцієнтом $k > 0$, оскільки результат послідовного виконання гомотетії з коефіцієнтом (- k) та повороту з кутом α є тотожним до результату виконання гомотетії з коефіцієнтом k та повороту з кутом $\alpha+180°$.

Оскільки гомотетія є перетворенням подібності, а поворот – рухом, то і поворотна гомотетія є перетворенням подібності. Тому для довільної фігури S її образ S* подібна до S фігура.

Гомотетія — перетворення, за якого кожній точці площини (простору) ставиться відповідно інша точка (її називають образом даної точки), що лежить на прямій, яка з'єднує дану точку з якоюсь фіксованою точкою (центром гомотетії).

При перетворені подібності на площині та в просторі[11]:

- образом прямої є пряма, а образом відрізка є відрізок;
- перетворення подібності відображає паралельні між собою прямі на паралельні між собою прямі, але образ прямої не обов'язково має бути паралельним даній прямій;
- образом кута є кут, який дорівнює даному;
- образом променю є промінь, образом півплощини – півплощина, образом площини є площина;
- образом трикутника є трикутник, подібний даному, а образом тетраедра є тетраедр, подібний даному;

- образом кола є коло, а образом сфери є сфера;
- перетворення подібності зберігає відношення довжин будь-яких двох відрізків, тобто відношення довжин відрізків дорівнює відношенню довжин їх образів;
- перетворення подібності зберігає величину кута між прямими, між прямою та площиною, між площиною та площиною;
- площа многокутника змінюється в k^2 разів, де k — коефіцієнт подібності;
- об'єм тіла у просторі змінюється у k^3 разів, де k — коефіцієнт подібності.

Поворотом площини навколо даної точки O на заданий орієнтований кут величини **α** називається перетворення площини, яке точку O відображає на себе, а всяку іншу точку M відображає на таку точку M_0, що $OM_0 = OM$ і орієнтований кут MOM_0 має величину **α**[10]. Точка O називається центром повороту, а величина **α** – кутом повороту. Число α вважається додатнім, якщо кут MOM_0 орієнтований проти руху годинникової стрілки і від'ємним - в іншому випадку. Поворот з центром O на кут **α** позначають R^{α}_{O}.

Не існує повороту простору навколо точки, бо немає однозначного напряму такого повороту. З цієї причини виникає поняття повороту простору навколо орієнтованої прямої(осі)[11].

Поворотом простору навколо осі *l* на заданий орієнтований кут величини **α** називається таке перетворення простору, при якому в кожній площині, перпендикулярній прямій *l* здійснюється поворот площини на кут **α** відносно точки перетини її з прямою *l* (рис.1.1)[11]. Орієнтація прямої *l* (осі повороту) дозволяє однозначно орієнтувати кути в кожній площині, перпендикулярній *l*.

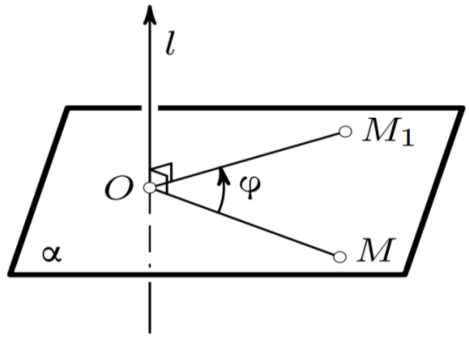

Рис. 1.1

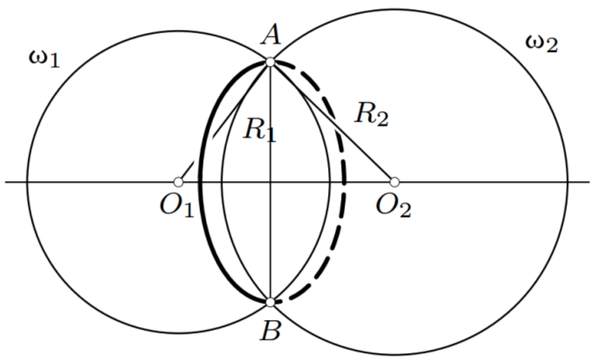

Рис. 1.2

Перетин двох сфер

Нехай дано сфери (O_1, R_1) та (O_2, R_2). Якщо $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$, то ці сфери мають спільне коло, центр якого належить прямій O_1O_2, а також площина цього кола перпендикулярна до прямої O_1O_2[11].

Доведення:

Проведемо довільну площину α через пряму O_1O_2 центрів цих сфер. Вона перетинає сфери, по великим колам ω_1 та ω_2. З планіметрії відомо, що якщо виконуються дані нерівності, то кола ω_1 та ω_2 перетинаються в двох точках A та B (рис. 1.2). При обертанні площини α навколо прямої O_1O_2 кола ω_1 та ω_2 опишуть дані сфери, а точки A та B – коло, що належить кожній з цих сфер.

Кут між сферами

Кутом між двома сферами, що перетинаються прийнято вважати кут між дотичними площинами до цих сфер, проведених в одній з їх спільних точок[11]. Оскільки дотична площина до сфери перпендикулярна радіусу сфери, проведеному в точку дотику, то кутом між двома сферами, що перетинаються можна вважати кут між радіусами сфер, проведених в одну з спільних точок. Кути при всіх таких точках рівні, бо дані сфери переходять в себе, при обертанні навколо прямої, що містить центри сфер, при яких спільні точки сфер переходять одна в іншу. Тобто кутом між сферами (рис.1.2) є кут $\angle O_1AO_2$.

Кут між колами

Кутом між колами називають кут між дотичними до цих кіл в точці їх перетину. Він також дорівнює куту між радіусами даних кіл проведених до однієї і тієї ж спільної точки цих кіл.

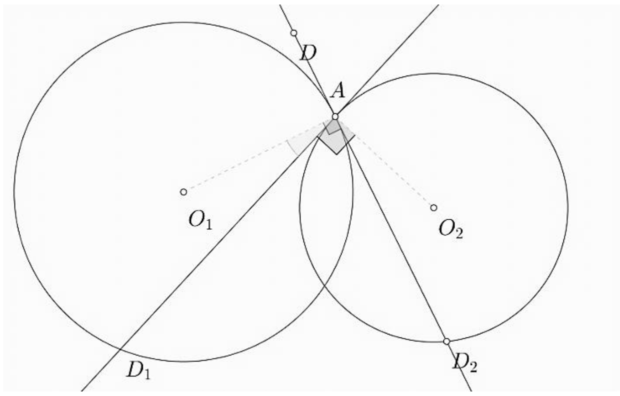

Рис. 1.3

Доведення:

Оскільки AD_2 та AD_1 – дотичні до даних кіл в точці A(рис. 1.3), то $\angle O_1AD_2 = \angle D_1AO_2 = 90°$. Також $\angle O_1AD_2 = \angle O_1AD_1 + \angle D_1AD_2$, а $\angle O_1AD_2 = \angle D_1AD_2 + \angle O_2AD_2$. З цього випливає, що $\angle O_1AD_1 = \angle O_2AD_2$. Кутом між дотичними є кут $\angle DAD_1 = 90° + \angle O_1AD_1$. Очевидно, що тоді $\angle O_1AO_2 = \angle DAD_1$.

РОЗДІЛ 2
БАЗОВІ ЗАДАЧІ ПОВОРОТНОЇ ГОМОТЕТІЇ НА ПЛОЩИНІ

Задача 1

Кола ω та $\omega*$ перетинаються в точках A і B. При поворотній гомотетії з центром в точці A, яка переводить ω в $\omega*$, точка M кола ω переходить у точку M∗.

Довести, що пряма MM∗ проходить через точку B[4].

Розв'язок:

Нехай образом точки B при поворотній гомотетії є точка B∗(рис. 2.1 а). Тоді образом трикутника ABM є трикутник AB∗M∗, а отже ці трикутники подібні.

Звідси $\angle ABM = \angle AB*M*$. Чотирикутник ABM∗B∗ вписаний, тому

$\angle ABM* + \angle ABM = \angle ABM* + \angle AB*M* = 180^\circ$, тобто M − B − M∗ - одна пряма.

Аналогічно, для розташування кіл, зображеного на рис. 2.1 б), дістаємо, що

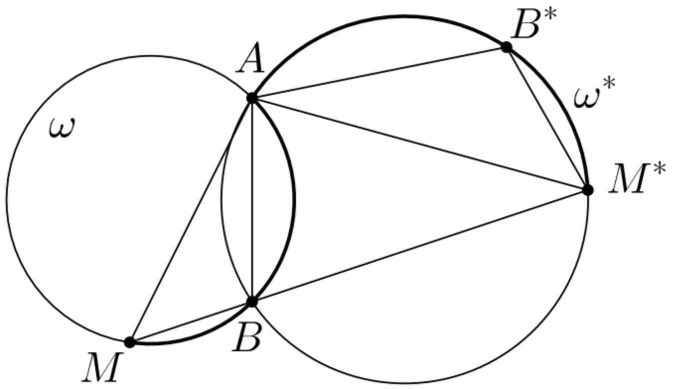

Рис. 2.1 а)

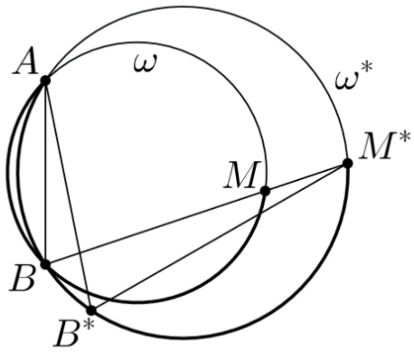

Рис. 2.1 б)

Задача 2

Кола ω_1 і ω_2 перетинаються в точках A і B. Прямі, які проходять через точку B, перетинають коло ω_1 в точках P_1 і Q_1, а коло ω_2 — в точках P_2 і Q_2 (рис. 2.2). Довести, що кут між прямими P_1Q_1 і P_2Q_2 дорівнює куту між колами ω_1 і ω_2.

Розв'язок:

Розглянемо поворотну гомотетію з центром A, яка переводить ω_1 в ω_2. За ***задачею 1*** образи точок P_1 та Q_1 за цією поворотною гомотетією належать прямим p та q.

Тому точки P_1 та Q_1 переходять у точки P_2 та Q_2 відповідно, а пряма P_1Q_1 — у пряму P_2Q_2. Отже, кут між прямими P_1Q_1 і P_2Q_2 дорівнює куту поворотної гомотетії. Дотична до кола ω_1 в точці A переходить при поворотній гомотетії у дотичну до кола ω_2, тому кут між колами, тобто кут між цими дотичними, теж дорівнює куту поворотної гомотетії.

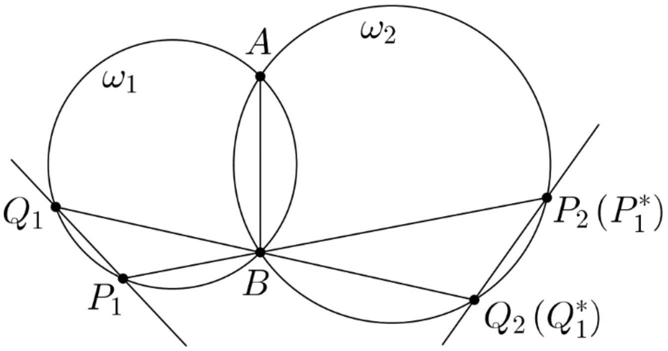

Рис. 2.2

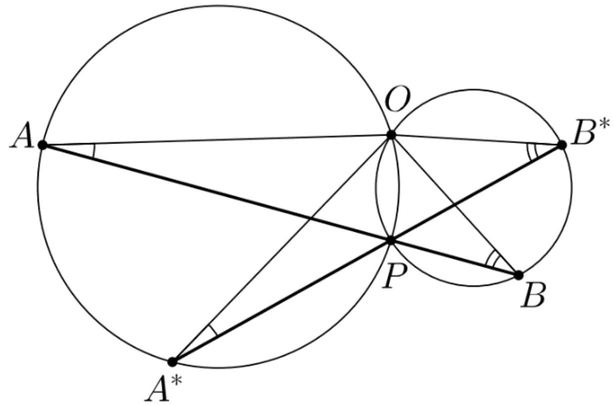

Рис. 2.3

Задача 3

Нехай P — точка перетину прямих AB і A∗B∗. Довести, що якщо жодні дві з точок A, B, A∗, B∗ та P не збігаються, то центром поворотної гомотетії, яка переводить точку A у точку A∗, а точку B у точку B∗, є спільна точка описаних кіл трикутників PAA∗ та PBB∗, причому така поворотна гомотетія єдина.

Розв'язок:

Якщо A∗P : AP = B∗P : BP, то A∗B∗ ∥ AB, відрізок AB переходить у відрізок A∗B∗ при гомотетії з центром P, а описані кола трикутників PAA∗ та PBB∗ дотикаються в точці P. Надалі будемо вважати, що A∗P : AP ≠ B∗P : BP. Тоді описані кола трикутників P AA∗ та P BB∗ перетинаються вдруге в деякій точці O (рис. 2.3), звідки ∠PAO = ∠PA∗O та ∠PBO = ∠PB∗O. Тому ∆OAB ∼ ∆OA∗B∗, а отже O — центр поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок A∗B∗. Якщо припустити, що O′ — центр іншої поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок A∗B∗, то ∆O′AB ∼ ∆O′A∗B∗, ∠PAO′ = ∠PA∗O′ та

∠PBO′ = ∠PB∗O′. Тому точка O′ є точкою перетину описаних кіл трикутників PAA∗ і P BB∗, причому O′ ≠ P, тобто O′ збігається з O.

Задача 4

Довести, що центром поворотної гомотетії, що переводить відрізок AB у відрізок BC, є точка перетину кола, що проходить через точку A і дотикається прямої BC в точці B, і кола, що проходить через точку C і дотикається прямої AB в точці B.

Розв'язок:

Якщо точка O є центром поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок BC, то ∠OAB = ∠OBC та ∠ABO = ∠BCO (рис. 2.4). Отже, описані кола трикутників OBC та OAB дотикаються до AB та BC відповідно.

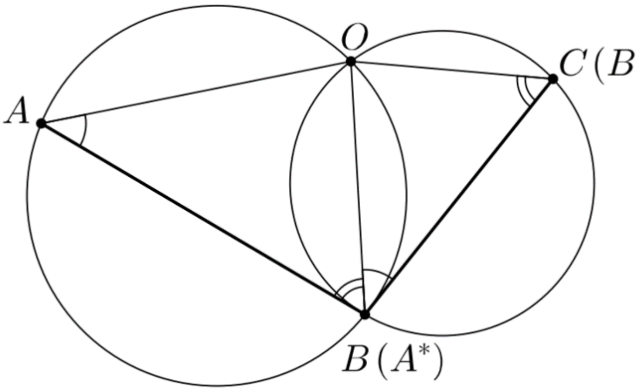

Рис. 2.4

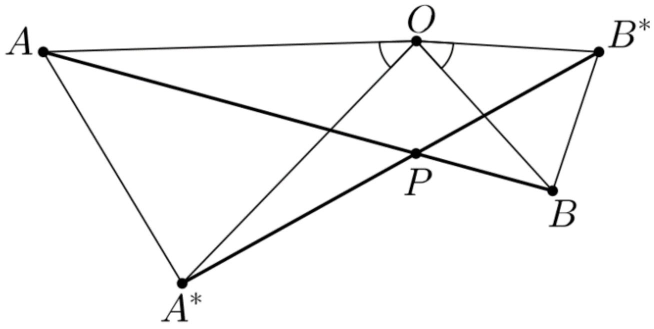

Рис. 2.5

Задача 5

Довести, що центр поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок A∗B∗, збігається з центром поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AA∗ у відрізок BB∗.

Розв'язок:

Нехай O — центр поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок A∗B∗ (рис. 2.5). Тоді ∠AOA∗ = ∠BOB∗ та A∗O : AO = BO∗ : BO.

Звідси ∠AOB = ∠A∗OB∗ та BO : AO = B∗O : A∗O. Отже, O — центр поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AA∗ у відрізок BB∗.

РОЗДІЛ 3
ПОВОРОТНА ГОМОТЕТІЯ В ПРОСТОРІ

У даному розділі проведено дослідження взаємозв’язку між теорією поворотної гомотетії на площині та в просторі.

Поняття поворотної гомотетії у просторі.

Як відомо з планіметрії, поворотна гомотетія являє собою композицію руху площини – повороту та гомотетії, що можна записати, як перетворення –
$\varphi = R_{\alpha}^{O1} \circ H_{k}^{O2}$, причому не важливо в якій послідовності виконувати ці перетворення. Надалі будемо вважати, що центри цих перетворень співпадають,
тобто $O_1 \equiv O_2$. Зазначимо також, що для простору справедливість цієї композиції залишається незмінною, за винятком того, що поворот у просторі відбувається відносно осі. Розглянемо дві сфери, що перетинаються по колу ω з центром O. Точки A і B отримані перетином довільної площини, проведеної через пряму O_1O_2 (рис. 4.1). Ця площина перетинає сфери по їх великим колам.

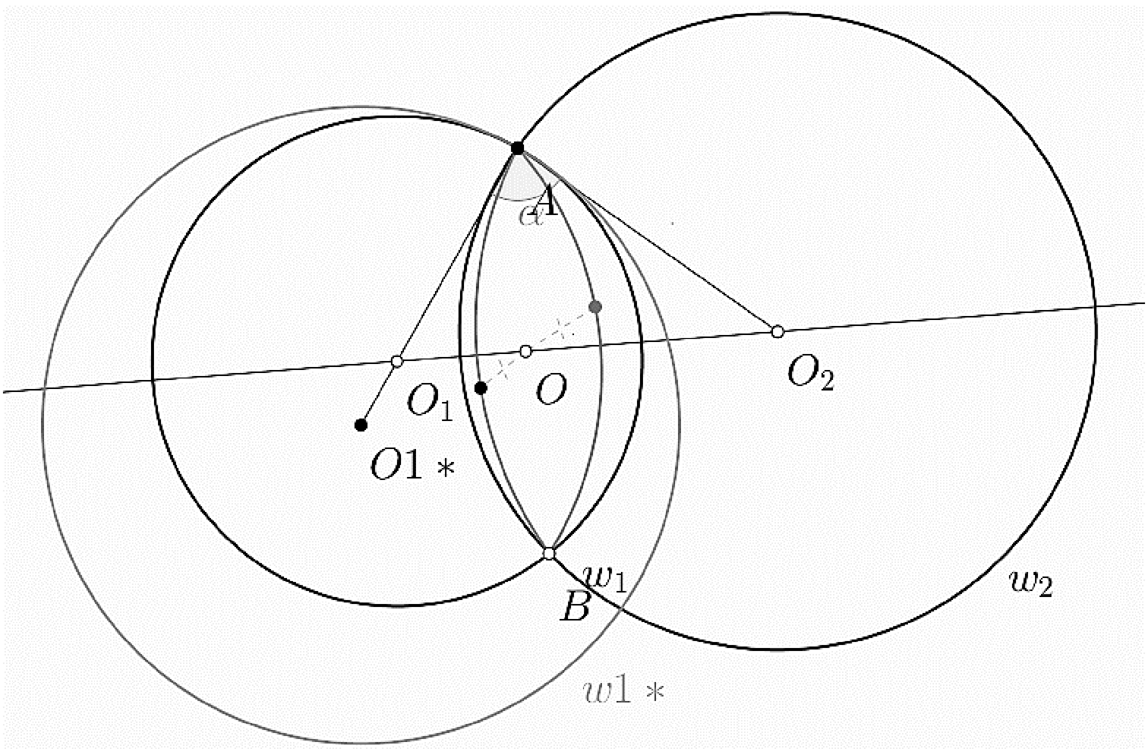

Рис.4.1

Тоді для того, щоб здійснити поворотну гомотетію з центром в точці А, можна спочатку зробити сфери ω_1 та ω_2 рівними, відповідно провівши гомотетію сфери ω_1 з центром в точці А та коефіцієнтом $k = R_2/R_1$, тоді сфера ω_1^* - образ сфери ω_1 при даній гомотетії. Далі, помітимо, що поворот з центром в точці А навколо осі l, перпендикулярній до прямих O_1A та O_2A, та кутом α, що дорівнює куту між відповідними сферами, переводить сферу ω_1^* в сферу ω_2. Тобто такою композицією ми здійснили поворотну гомотетію двох даних сфер.

Таким чином зрозуміло, що поворотну гомотетію, при якій сфера дана 1 переходить в сферу дану 2 можна задати будь-якою точкою на спільному колі цих двох сфер.

Задача 1

Дві сфери φ_1 та φ_2 з центрами в точках O_1 та O_2 відповідно перетинаються по спільному колу ω. При поворотній гомотетії з центром в точці А, що належить ω та площині MO_1O_2 точка М переходить у точку М*. Довести, що пряма ММ* проходить через другу точку перетину площини MO_1O_2 з колом ω – точку В.

Розв'язок:

Точки М, O_1 та O_2 однозначно задають площину α, якій належать також точки А та В (рис. 4.2). Якщо точка А центр поворотної гомотетії, яка переводить точку М сфери φ_1 у точку М* сфери φ_2 то $\Delta MAO_1 \sim \Delta M^*AO_2$ і кут повороту $\beta = \angle O_1AO_2$. Припустимо, що точка М* не належить площині α. Також $\Delta MAO_1 \sim \Delta M^{**}AO_2$, де М** - точка, що є образом точки М при поворотній гомотетії на площині α з центром в точці А і кутом повороту $\beta = \angle O_1AO_2$.

З подібності даних трикутників випливає, що:

$\frac{AO1}{MA} = \frac{AO2}{M*A} = \frac{AO2}{M**A}$, звідки $M^*A = M^{**}A$. $\angle MAM^* = \angle MAM^{**}$, тому що М* та М** отримані поворотними

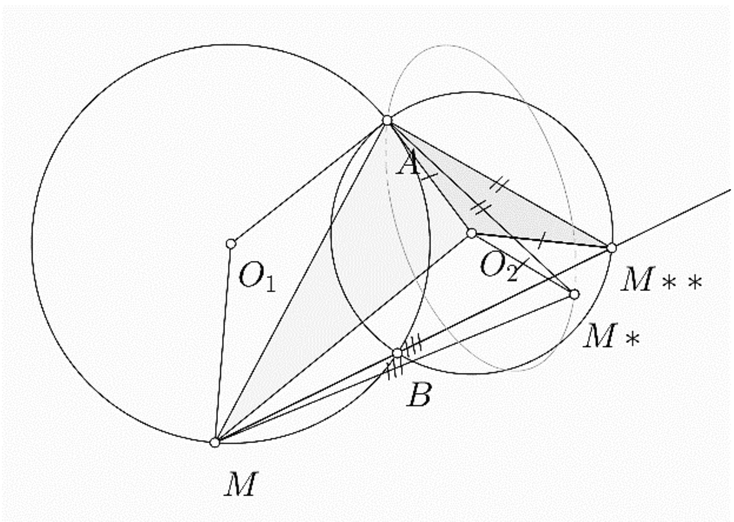

Рис. 4.2

гомотетіями з рівними кутами повороту. Тоді з рівності пари трикутників MAM* та MAM**(за трьома сторонами), а також радіусів сфери φ_2 випливає, що тетраедри MAO_2M^* та MAO_2M^{**} рівні, а оскільки вони мають спільну грань та рівні між собою відповідні ребра, то вони співпадають. А отже $M^* \equiv M^{**}$. Тоді, за базовою задачею 1 для площини MBM** - одна пряма. А отже, MBM* - одна пряма.

Задача 2

Дві сфери φ_1 та φ_2 з центрами в точках O_1 та O_2 відповідно перетинаються по спільному колу ω. На ω довільно обрали точку A і провели через неї прямі p та q, які належать площині A, O_1, O_2 та вдруге перетинають сфери в точках P_1, P_2 та Q_1, Q_2 відповідно. Довести, що кут між прямими p і q дорівнює куту між сферами φ_1, φ_2.

Розв'язок:

Точки A, O_1, O_2 однозначно задають площину α. Тоді прямі p та q також належать цій площині. Нехай дана площина вдруге перетинає спільне коло сфер ω в точці B, тоді задача зводиться до базової задачі 2 поворотної гомотетії на площині, бо маємо два великих кола сфер, що перетинаються в двох точках A і B. Тоді кут між прямими p та q дорівнює куту між великими колами сфер, що лежать в одній площині α, яка містить пряму O_1O_2, а кут між такими колами дорівнює куту між сферами.

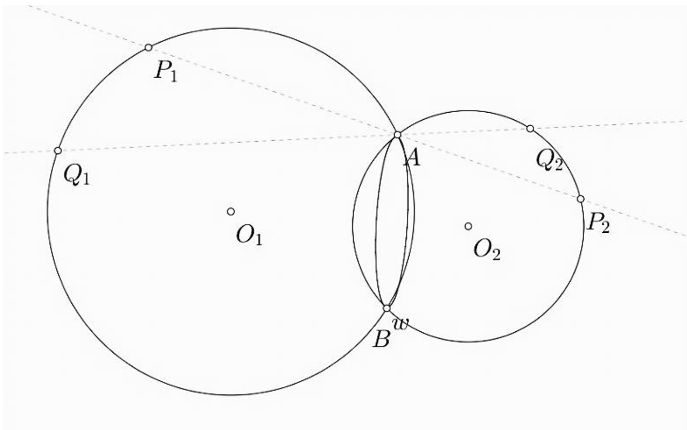

Рис. 4.3

РОЗДІЛ 4
ЗАСТОСУВАННЯ ПОВОРОТНОЇ ГОМОТЕТІЇ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Задача 1

Нехай ABC — гострокутний трикутник. Оберемо довільну точку D на дузі BC описаного кола, яка не містить точку A. Нехай E, F — проекції точки D на BC та AC, N це середина AB, M — середина EF. Довести, що $\angle NMD = 90^\circ$

Розв'язок:

Оскільки $\angle DEC = \angle DFC = 90^\circ$, то чотирикутник DEFC вписаний. Нехай ω, ω^* це описані кола трикутника ABC та чотирикутника DEFC (рис. 3.1). За базовою задачею 1 розділу 1 при поворотній гомотетії з центром у точці D, яка переводить коло ω у коло ω^*, точки B, A перейдуть у точки E, F. Тоді середина AB перейде в середину EF, тобто точка N перейде у точку M.

Звідси $\angle NMD = \angle BED = 90^\circ$.

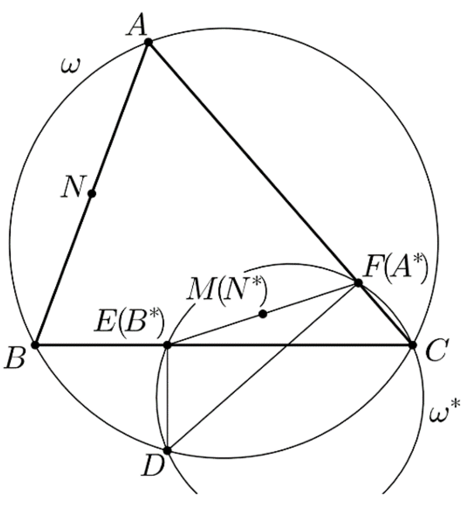

Рис. 3.1

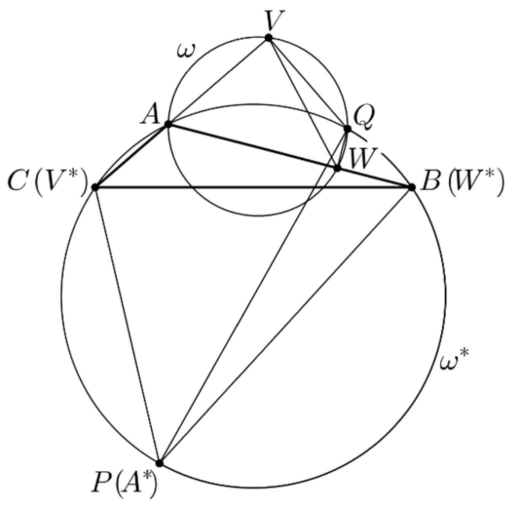

Рис. 3.2

Задача 2 (Великобританія, 2007 р.)

Нехай ABC — трикутник з тупим кутом $\angle A$, Q — точка на описаному колі (відмінна від точок A, B та C), яка знаходиться по один бік з A від хорди BC, та P — діаметрально протилежна до Q точка.

Позначимо V та W за основи перпендикулярів, опущених з точки Q на CA та AB відповідно. Довести, що трикутники PBC та AWV подібні.

Розв'язок:

Оскільки $\angle QWA = \angle QVA = 90^\circ$,то чотирикутник QW AV вписаний у коло з діаметром AQ. Нехай ω — описане коло чотирикутника QWAV, а $\omega*$ — описане коло трикутника ABC. Ці кола перетинаються в точках A та Q (рис. 3.2). Розглянемо поворотну гомотетію з центром у точці Q, яка переводить коло ω у коло $\omega*$. Згідно базової задачі 1 при цій поворотній гомотетії точки V, W переходять у точки перетину прямих AV та AW з $\omega*$, тобто в точки C, B відповідно. Діаметр AQ кола ω переходить у діаметр P Q кола $\omega*$, тому точка A переходить у точку P, а трикутник AWV — у подібний йому трикутник PBC.

Задача 3

На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC відмітили довільні точки P, Q, R відповідно. Нехай O_1, O_2, O_3 — центри описаних кіл трикутників AQR, BRP, CPQ. Довести, що трикутники $O_1O_2O_3$ та ABC подібні.

Розв'язок:

Доведемо, що описані кола трикутників AQR, BRP, CPQ мають спільну точку. Нехай описані кола трикутників AQR та BRP перетинаються вдруге в точці D(рис 3.3).Тоді $\angle ARD = 180^\circ - \angle BRD = \angle BPD$.

Також $\angle AQD = 180^\circ - \angle ARD = 180^\circ - \angle DQC$ і $\angle BPD = 180^\circ - \angle DPC$, а отже

$\angle DPC + \angle DQC = 180^\circ$ і точки DQCP належать одному колу. При поворотній гомотетії, що переводить описане коло трикутника AQR в описане коло трикутника BRP точка D є центром поворотної гомотетії та за задачею 1 розділу 1 $A \to B$ і $O_1 \to O_2$ відповідно, тобто $\Delta AO_1D \to \Delta BO_2D$. Аналогічно для описаних кіл пар трикутників BRP та CPQ, CPQ та AQR. Таким чином отримуємо, що дана поворотна гомотетія переводить трикутник ABC у $O_1O_2O_3$, а отже трикутники $O_1O_2O_3$ та ABC подібні.

Задача 4

Побудувати квадрат ABCD так, щоб вершина A знаходилась в даній точці, а вершини B і C належали даному колу[11].

Розв'язок:

Нехай дане коло ω має центр O та радіус R, ABCD — шуканий квадрат (рис. 3.4). Поворотна гомотетія з центром в точці A, кутом 45° та коефіцієнтом $k = \sqrt{2}$ переводить B в C. Якщо ω^* — образ кола ω при цій поворотній гомотетії, то C є спільною точкою кіл ω та ω^*. Звідси отримуємо спосіб побудови: будуємо коло
ω^* (його центр O^* є вершиною квадрата зі стороною OA, а його радіус дорівнює $R\sqrt{2}$), та знаходимо C як точку перетину кіл ω та ω^*. Далі залишається відновити квадрат за вершинами A та C. У залежності від кількості спільних точок кіл ω^* та ω дістаємо різну кількість розв'язків. Оскільки $OA = OO^*$, то при $OA < (1 + \sqrt{2})R$ шуканих квадратів буде два, при $OA = (1 + \sqrt{2})R$ дістанемо єдиний квадрат ABCD, а при $OA > (1 + \sqrt{2})R$ розв'язків немає.

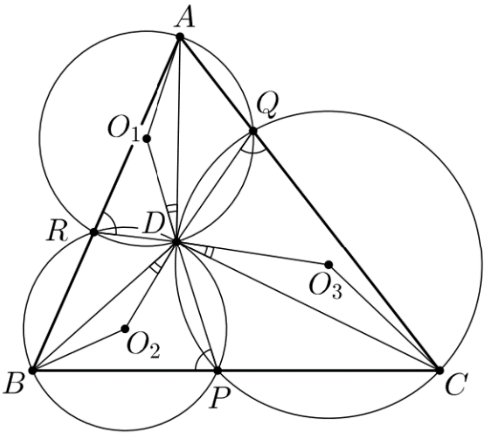

Рис. 3.3

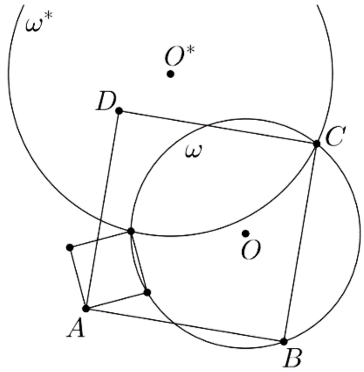

Рис. 3.4

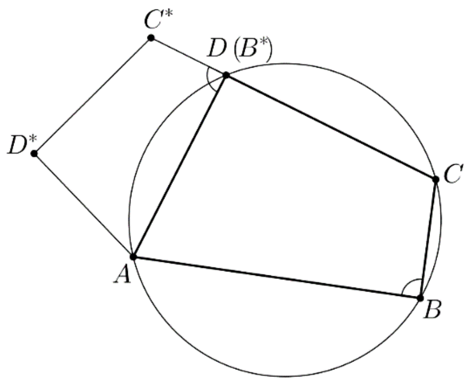

Рис. 3.5

Задача 5

Побудувати вписаний чотирикутник з відомими сторонами AB, BC, CD та DA.

Розв'язок:

Нехай чотирикутник ABCD шуканий. Виконаємо поворотну гомотетію з центром A, яка переводить B у D. Оскільки за умовою $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то $\angle ADC^* + \angle ADC = 180^\circ$, тобто точки C, D, C^* колінеарні (рис. 3.5).

Відрізок DC∗ можна побудувати, враховуючи пропорцію AD : AB = DC∗: BC. Відношення відстаней від точки A до точок C∗ і C дорівнює коефіцієнту подібності k = AD : AB. Отже, можна побудувати точки C, D, C∗, а потім знайти точку A, як спільну точку кола з центром D і радіусом DA та кола Аполлонія, побудованого для відрізка CC1 і відношення k. Тепер трикутник ACB будується за трьома сторонами.

Задача 6 (ІІ тур ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, Київ 2015)

Кола ω_1 та ω_2 з центрами O_1 та O_2 відповідно перетинаються в точках A та B. Пряма O_1O_2 перетинає ω_2 в точці Q, що не лежить всередині кола ω_1, та ω_1 в точці X, що лежить всередині кола ω_2.Навколо трикутника O_2AX описали коло ω_3, що перетинає коло ω_2 вдруге у точці T. Пряма QT перетинає коло ω_3 у точці K, а пряма QB перетинає ω_1 вдруге в точці H(рис.3.6).

Доведіть, що:

а) точки T, X, B лежать на одній прямій;

б) точки K, X, H лежать на одній прямій.

Розв'язок:

Помітимо, що A – спільна точка кіл ω_1, ω_2, ω_3, і покладемо, що A – центр поворотної гомотетії.

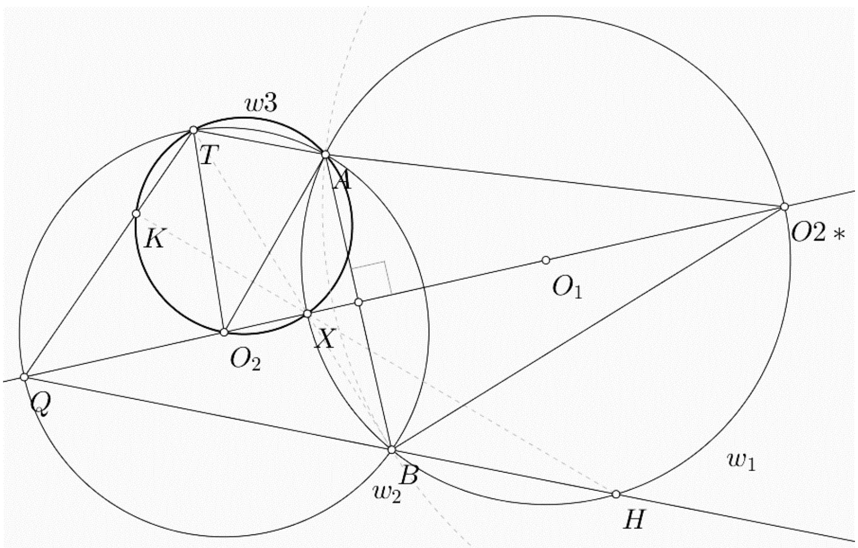

Рис. 3.6

а) Трикутник TO_2A – рівнобедрений ($O_2T = O_2A$ як радіуси кола ω_2). Відрізок XO_2^* ділить хорду AB навпіл, бо перпендикулярний до AB (як радикальна вісь двох кіл до лінії центрів) і є діаметром. Тоді $\Delta\ AO_2^*B$ – рівнобедрений, бо O_2^*X це висота і медіана одночасно.

При поворотній гомотетії, що переводить ω_3 в ω_1 $O_2 \rightarrow O_2^*$. Тобто відрізок AO_2 переходить у відрізок AO_2^*. Це означає, що оскільки $TO_2 = AO_2$, то точка T переходить T^* (T^* - образ T при даній поворотній гомотетії) таку, що $O_2^*A = O_2^*T^*$

(тобто T* можна отримати перетином кола ω_1 з колом радіуса O2*A та центром в точці O_2*). А оскільки O_2*A = O_2*B, то T* співпадає з B. А отже B - є образом точки T при даній поворотній гомотетії і за задачею 1 T-B-X – одна пряма.

б) При поворотній гомотетії, яка переводить коло ω_1 в коло ω_2 H → Q за базовою задачею 1. Аналогічно при поворотній гомотетії, яка переводить коло ω_2 в коло ω_3 Q→K, а оскільки перетворення $\omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_3$ є тотожним до перетворення $\omega_1 \rightarrow \omega_3$ а оскільки точка X – друга точка перетину кіл ω_1 та ω_3, то за базовою задачею 1 K - X - H – одна пряма.

Задача 7 (Shortlist Міжнародної математичної олімпіади, 2006 р.)

У трикутнику ABC нехай J — центр зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC в точці A_1 та продовжень сторін AC, AB в точках B_1, C_1 відповідно. Прямі A_1B_1 та AB перпендикулярні і перетинаються в точці D. Нехай E — основа перпендикуляра, опущеного з точки C_1 на DJ. Знайти кути $\angle BEA_1$ і $\angle AEB_1$.

Розв'язок:

Оскільки трикутник CA_1B_1 рівнобедрений, то бісектриса CJ кута $\angle B_1CA$ перпендикулярна до A_1B_1. Тому бісектриса суміжного з ним кута $\angle BCA$ паралельна до A_1B_1. Але $A_1B_1 \perp AB$, отже бісектриса трикутника ABC є висотою, тобто цей трикутник рівнобедрений (AC = BC). Звідси випливає, що CJ ∥ AB.

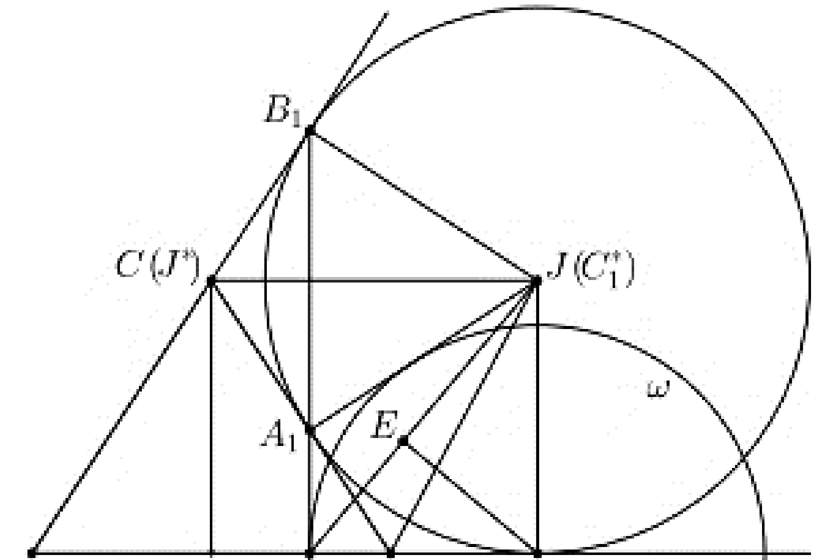

Рис. 3.7

Трикутники ABC та B_1A_1J подібні, оскільки їх відповідні сторони перпендикулярні. Зокрема $\angle DA_1J = \angle C_1BA_1$ як суміжні з рівними кутами $\angle B_1A_1J$ та $\angle CBA$. Чотирикутник JA_1BC_1 вписаний, тому $\angle C_1A_1J = \angle C_1BJ = \frac{1}{2}\angle C_1BA_1 = \frac{1}{2}\angle DA_1J$.

Звідси A_1C_1 — бісектриса кута $\angle DA_1J$. У трикутнику B_1A_1J прямі A_1C_1 та JC_1 — бісектриси зовнішніх кутів при вершинах A_1 та J. Тоді C_1 є центром зовнівписаного кола ω, що дотикається до сторони A_1J і до продовження B_1A_1 в точці D (рис. 3.7).

Тепер розглянемо поворотну гомотетію, яка переводить трикутник B_1A_1J у трикутник ABC. Вона є композицією повороту на 90° та гомотетії зі спільним центром. Тому для довільної точки X відрізок $XX*$ видно з центру поворотної гомотетії під прямим кутом. Ця поворотна гомотетія переводить точку C_1 (центр зовнівписаного кола ω) у точку J, а D (точка дотику цього кола з продовженням B_1A_1) у точку C_1. Отже, центр поворотної гомотетії лежить на колах з діаметрами C_1J та DC_1. Звідси випливає, що центром поворотної гомотетії є точка E.

Тоді $\angle A_1EB = \angle A_1EA*_1 = 90^\circ$ та $\angle B_1EA = \angle B_1EB*_1 = 90^\circ$.

Задача 8 (Автор Баценко Т.М.)

Трапецію ABCD вписано в коло, точка M – середина більшої основи AD. Відрізок CM перетинає описане навколо трапеції коло в точці X. N – середина BX. Пряма AN перетинає дане коло вдруге в точці Y. Доведіть що DY || BX.

Розв'язок :

Оскільки трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна (дуги, що стягуються паралельними хордами рівні). Тоді $\angle AXB = \angle CXD$, бо вони спираються на рівні дуги, а $\angle ABX = \angle ADX$, бо спираются на одну дугу AX(рис. 3.8).

Тоді $\Delta XAB \sim \Delta XMD$.

Точка X – центр поворотної гомотетії з кутом AXC, що переводить ΔXAB в ΔXMD. Точка N^* - образ точки N при поворотній гомотетії, отже $XN^*=N^*D$, і MN^* – медіана, в трикутнику XMD.

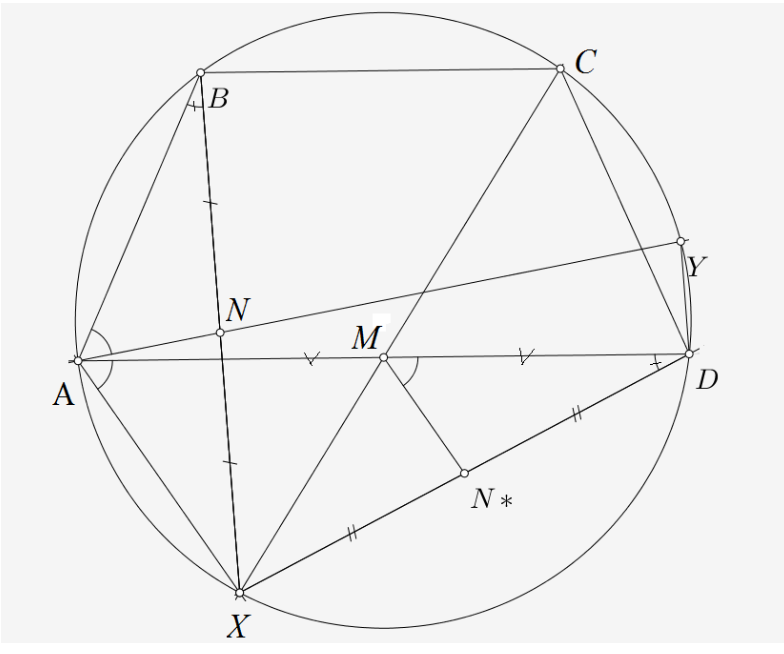

Рис. 3.8

Оскільки MN* – середня лінія в трикутнику AXD, то MN* || AX, з цього отримаємо, що ∠XAD=∠N*MD. Так як при поворотній гомотетії з центром в точці X, A→M, N→N* та B→D, а отже: ∠NAB=∠ N*MD і ∠XAD = ∠NAB = ∠YAB;

А оскільки рівні дуги, стягуються паралельними хордами (у даному випадку дуги DX і YB рівні), то DY || BX.

Задача 9 (Точка Мікеля)

Чотири прямі, що перетинаються, утворюють чотири трикутники. Доведіть, що чотири кола, описані навколо цих трикутників мають спільну точку.

Розв'язок:

Нехай прямі AB і DE перетинаються у точці C, а BD і AE – у точці F (Рис. 3.9). Центром поворотної гомотетії, що переводить відрізок AB у відрізок ED, є точка перетину описаних кіл трикутників AEC і BDC, відмінна від точки C (див. базову задачу 3), а центром поворотної гомотетії, що переводить AE у BD є точка перетину описаних кіл трикутників ABF і EDF. Відповідно до базової задачі 5 центри цих поворотних гомотетій збігаються, тобто всі чотири описані кола мають спільну точку.

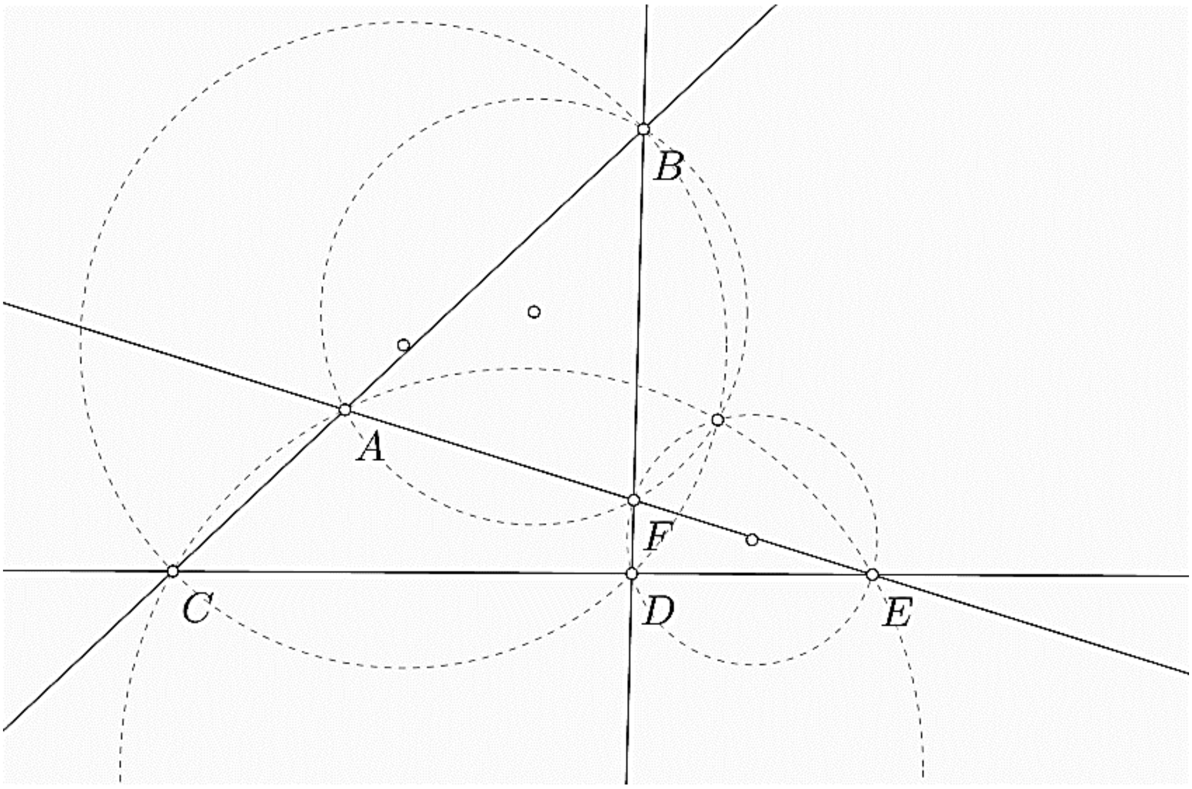

Рис. 3.9

ВИСНОВКИ

Кожен метод розв'язування задач особливий та неповторний. А ще більш цінним він стає тоді, коли відкриває можливість створювати щось нове, ніким раніше не знане. Враховуючи отримані у роботі результати, можна зробити висновок, що поворотна гомотетія є потужним інструментом для розв'язування задач, а також відкриває можливості для створення нових задач і нових досліджень з теми перетворення площини та простору.

Результати проведеної роботи :

- викладено теоретичну базу з теми поворотна гомотетія на площині, що має важливе значення для розуміння роботи загалом
- показано ефективність, практичність та актуальність застосування поворотної гомотетії при розв'язуванні великої кількості задач різного рівня складності
- наведено авторські розв'язки деяких задач, які у більшості випадків є коротшими та більш практичними за стандартні методи
- запропоновано авторські задачі з даної теми
- автором проведено дослідження на тему поворотна гомотетія в просторі, результати якого відкривають новий напрям у стереометричних задачах високого рівня складності, які потребують поглиблених знань шкільної геометрії

Таким чином, у даній науковій роботі було доведено, що поворотна гомотетія площини та простору – актуальна тема сучасної геометрії, яка має широке практичне застосування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. А.В.Акопян, А.А.Заславський - Геометричні перетворення. – М.: МЦНМО.2004. - 86с.:іл.
2. Адамар Ж. Елементарна геометрія. – М.; Учпедгіз, 1957.
3. Адамар Ж. Елементарна геометрія. Ч. 2. Стереометрія. – М.; Учпедгіз, 1958.
4. Баценко Т.М. Поворотна гомотетія/ Т.М. Баценко//У світі математики . - 2015. – Т.21. – випуск 2. – с. 1-10;
5. Б.А. Розенфельд. Багатовимірні простори. - М.: Наука, 1966.
6. В.В. Прасолов. Задачі з планиметрії ; пер. з рос. А. Кравчука. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. – 576с. : іл.
7. В.В. Прасолов, Шаригін І.Ф. Задачі з стереометрії. – М.: Наука, 1989.
8. І. М. Яглом Геометричні перетворення. , в 2 – х т. – М.: ГІТТЛ. 1955.1956.
9. С. Л. Грейцер, Г. С. М. Коксетер - Нові зустрічі з геометрією. – М.: Наука, 1978.
10. Я.П. Понарін. Елементарна геометрія: У 2 т. - Т.1: Планіметрія, перетворення площини.-2 – ге видан., стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 312с.:іл.
11. Я. П. Понарін. Елементарна геометрія: У 2 т. – Т.2: Стереометрія, перетворення площини. – 2 – ге видан., стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 256с.:іл.

ІНТЕРНЕТ-РЕСУРСИ

http://geometry.ru/

http://www.problems.ru/

http://www.mccme.ru/free-books